Student's Copy

Serial No.
3450011

02/GO/CC/M-2025 – 45

MATHEMATICS

Time : 3 Hours] [*Full Marks* : 300

Section – I
खण्ड – I

1. *(a)* If W be the space generated by the polynomials

$p_1(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$

$p_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 1$

$p_3(x) = x^3 + 6x - 5$

$p_4(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5$

then find the basis of W and dimension of W.

यदि W बहुपदों से जनित एक स्थान है

$p_1(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$

$p_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 1$

$p_3(x) = x^3 + 6x - 5$

$p_4(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5$

तब W का आधार और उसकी विमा ज्ञात कीजिए ।

(b) Find the matrix P such that $P^{-1}AP$ is diagonal matrix, where $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

एक आव्यूह P इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $P^{-1}AP$ विकर्णीय है, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ।

(c) Find the volume of a sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ का आयतन ज्ञात कीजिए ।

(d) If $\vec{A}$ is not a constant vector and $\vec{\nabla}$ is an operator, then prove that

$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})$, where $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$.

यदि $\vec{A}$ एक अचर सदिश नहीं है तथा $\vec{\nabla}$ एक संकारक है, तो सिद्ध कीजिए

$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})$, जहाँ $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$ । **(12½×4=50)**

2. *(a)* Prove that $\int_0^{\pi/2} \sin^m\theta.\cos^n\theta\, d\theta = \frac{\left\lceil\frac{m+1}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil}{2\left\lceil\frac{m+n+2}{2}\right\rceil}$; m, n > 0 where ⌈ is gamma function.

सिद्ध कीजिए $\int_0^{\pi/2} \sin^m\theta.\cos^n\theta\, d\theta = \frac{\left\lceil\frac{m+1}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil}{2\left\lceil\frac{m+n+2}{2}\right\rceil}$; m, n > 0 जहाँ ⌈ गामा फल है ।

(b) Compute the Fernet frame {T, N, B}, curvature k and torsion τ, of the space curve below :

$\alpha(\theta) = \left(6\cos 2\theta\cos^3\left(\frac{2\theta}{3}\right), 6\sin 2\theta\cos^3\left(\frac{2\theta}{3}\right), \frac{1}{2}\cos 4\theta - \cos^2 2\theta\right)$ when $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

निम्नलिखित स्पेस वक्र का फर्नेट फ्रेम {T, N, B}, वक्रता k और टारिसन τ, ज्ञात कीजिए, जहाँ $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$\alpha(\theta) = \left(6\cos 2\theta\cos^3\left(\frac{2\theta}{3}\right), 6\sin 2\theta\cos^3\left(\frac{2\theta}{3}\right), \frac{1}{2}\cos 4\theta - \cos^2 2\theta\right)$ ।

(25×2=50)

***Or* / अथवा**

(a) Solve the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4}{x+a}\frac{dy}{dx} + \frac{6}{(x+a)^2}y = \frac{x}{(x+a)^2}; a > 0$$

अवकल समीकरण को हल कीजिए, a > 0

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4}{x+a}\frac{dy}{dx} + \frac{6}{(x+a)^2}y = \frac{x}{(x+a)^2}$$

(b) Prove that a quantity which on inner multiplication by an arbitrary vector always gives a tensor, is itself a tensor.

सिद्ध कीजिए एक राशि जिसे एक स्वेच्छ सदिश से आंतर गुणन करने पर एक टेन्सर प्राप्त होता है, स्वयं एक टेन्सर है । **(25×2=50)**

3. *(a)* If $\vec{F} = (3yx^2 + z^3)i + y^2j + 4yx^2k$ and C is a triangle with vertices (0, 0, 3), (0, 2, 0) and (4, 0, 0) and C has a counter clockwise rotation, then with the help of Stoke's theorem evaluate $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$, where $\vec{r} = xi + yj + zk$.

यदि $\vec{F} = (3yx^2 + z^3)i + y^2j + 4yx^2k$ तथा C एक त्रिभुज है जिसमें शीर्षा (0, 0, 3), (0, 2, 0) तथा (4, 0, 0) है, C की गति वामावर्त है तब स्टोक प्रमेय से $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$, का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{r} = xi + yj + zk$ है ।

(b) When an object projected into air under gravity whose initial velocity is "u" and angle of projection is θ, then find time of flight and maximum height reached.

एक पिण्ड को हवा में गुरुत्व के अधीन प्रारम्भिक वेग u से क्षैतिज से θ कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है, तो उड्डयन काल व अधिकतम ऊँचाई ज्ञात कीजिए । **(25×2=50)**

***Or* / अथवा**

(a) A sphere rolls down a rough inclined plane which θ degree from horizontal, if "x" be the distance of the point of contact of the sphere from a fixed point on the plane, then find the acceleration of the sphere, where "g" is gravity of earth.

एक गोला खुरदरे झुके हुए तल पर फिसलता है जो समतल से θ कोण पर झुका है, उस तल के एक बिन्दु से गोलों की दूरी x है, तब गोले का त्वरण ज्ञात कीजिए जबकि पृथ्वी गुरुत्व g है ।

(b) Trace the curve $x^3 + y^3 = 3axy$; $a > 0$.

वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$; $a > 0$ का अनुरेखण कीजिए । **(25×2=50)**

Section – II
खण्ड – II

4. *(a)* Find a complete and the singular solution of the following partial differential equation.

$4xyz = pq + 2px^2y + 2qxy^2$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण का पूर्ण तथा विचित्र हल ज्ञात कीजिए ।

$4xyz = pq + 2px^2y + 2qxy^2$, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ और $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

(b) If $f \in \mathcal{R}$ on [a, b] and if there is a differentiable function F(x) on [a, b] such that $F'(x) = f(x)$, then prove that $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, where $a < b$.

यदि $f \in \mathcal{R}$ [a, b] तथा एक अवकलनीय फलन F(x) अंतराल [a, b] पर विद्यमान है कि $F'(x) = f(x)$, तब सिद्ध कीजिए $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, जहाँ $a < b$ ।

(c) Find the most likely price in Mumbai corresponding to the price of Rs. 70 at Kolkata from the following. Given that correlation coefficient is 0.8.

	Kolkata	Mumbai
Average price	65	67
Variance	6.25	12.25

कलकत्ता के 70 रुपये के लिए मुम्बई में सापेक्ष मूल्य बताइये जबकि सहसम्बंध गुणांक 0.8 है ।

	कोलकत्ता	मुम्बई
औसत मूल	65	67
प्रसरण	6.25	12.25

(d) Prove that without zero divisor finite commutative ring is a field.
सिद्ध कीजिए एक शून्य भाजक रहित परिमित वलय एक क्षेत्र होता है । **(12½×4=50)**

5. (a) If G is an abelian group of order O(G), and if p is a prime number, such that $p^{\alpha} \mid O(G), p^{\alpha+1} \nmid O(G)$, then prove that G has a subgroup of order p^{α}.
यदि G एक आबेली समूह है जिसकी कोटि O(G) है तथा p एक अभाज्य संख्या है इस प्रकार कि $p^{\alpha} \mid O(G), p^{\alpha+1} \nmid O(G)$, तब सिद्ध कीजिए G एक उपसमूह रखता है जिसकी कोटि p^{α} है ।

(b) If in a group G, $xy^2 = y^2x$ and $yx^2 = x^2y$, then show that x = y = e, where e is the identity of G.

यदि एक समूह G में $xy^2 = y^2x$ तथा $yx^2 = x^2y$ है, तब दर्शाइये कि x = y = e, जहाँ e, G का तत्समक है । **(25×2=50)**

***Or*/अथवा**

(a) Using Newton's divided difference interpolation formula find f(x) as a polynomials in power of x – 6 with the help of given data.

x :	–1	0	2	3	7	10
f(x) :	–11	1	1	1	141	561

नीचे दिए डेटा की सहायता से न्यूटन के डिवाईडेड डिफरेन्स इनटरपोलेसन सूत्र से f(x) का मान x – 6 के घातों में एक बहुपद के रूप में प्राप्त कीजिए ।

x :	–1	0	2	3	7	10
f(x) :	–11	1	1	1	141	561

(b) Show that the Newton-Raphson method has a quadratic rate of convergence. Hence find the root of polynomial $x^2 - 5x + 2 = 0$, correct to five decimal places.
दर्शाइये की न्यूटन–राफ्सन विधि, एक द्विघात दर से अभिसरित होती है। अस्तु बहुपद $x^2 - 5x + 2 = 0$, का मूल दशमलव के 5 अंकों तक ज्ञात कीजिए। **(25×2=50)**

6. (a) Use the method of contour integration prove that $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

कन्टूर समाकल का उपयोग कर, सिद्ध कीजिए $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ।

(b) Ten competitors in a musical test where ranked by the three judges A, B and C in the following order :

Rank by A :	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
Rank by B :	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
Rank by C :	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

Using rank correlation method discuss which pair of judges has the nearest approach to common likings in music.

दस प्रतिस्पर्धियों को एक संगीत स्पर्धा में तीन निर्णायकों A, B और C के द्वारा निम्न रेंक दी गई है।

A द्वारा रैंक :	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
B द्वारा रैंक :	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
C द्वारा रैंक :	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

रेंक कोरिलेशन विधी से बताइये कि किन दो निर्णायकों की संगीत में एक समान राय है। **(25×2=50)**

***Or*/अथवा**

(a) There are five jobs, each of which must go through the two machines A and B in the order AB. Processing times are given in table. Calculate the total minimal idle time for machines.

Processing time (Hours)

Job	1	2	3	4	5
Time for A	5	1	9	3	10
Time for B	2	6	7	8	4

5 काम हैं, जिनमें से प्रत्येक को मशीनों A और B से होकर गुजरना होगा, क्रम में पहले A और फिर B । उनके कार्य करने के समय निम्न तालिका में दर्शित है, तो उन मशीनों के लिए आईड़ल समय (खाली रहने का समय) ज्ञात कीजिए ।

प्रसंस्करण समय (घण्टे)

जॉब	1	2	3	4	5
A के लिए समय	5	1	9	3	10
B के लिए समय	2	6	7	8	4

(b) Write the Kuhn-Tucker conditions for the following minimization problem :

Minimize $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Subjected to $2x_1 + x_2 \leq 5, x_1 + x_3 \leq 2, -x_1 \leq -1, -x_2 \leq -2, -x_3 \leq 0.$

कहन टक्कर विधि से न्यूनतम मान फल के लिए आवश्यक शर्त ज्ञात कीजिए ।

न्यूनतमीकरण कीजिए $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

बशर्ते कि $2x_1 + x_2 \leq 5, x_1 + x_3 \leq 2, -x_1 \leq -1, -x_2 \leq -2, -x_3 \leq 0$ । **(25×2=50)**